http://math.uni.lu/parlier/ hugo.parlier@uni.lu

Exercices 12 A

1. Pour chacune des fonctions suivantes, faites un dessin du graphe de la fonction et déterminer les limites (quand elles existent) $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

a) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

b) $f(x) = \frac{x^3}{|x|}$

c) $f(x) = \frac{\sin(x)}{|x|}$

d) $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$

e) $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$

Ensuite démontrer toutes les assertions.

2. Trouver (en justifiant) les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$

b) $\lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a}$

c) $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ avec $a > 0$

3. Démontrer que $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

4. Supposons que les limites $\lim_{x\to a^+} f_1(x) = L_1$ et $\lim_{x\to a^+} f_2(x) = L_2$ existent et sont finies.

a) Démontrer que si il existe $b > a$ tel que $f_1(x) \leq f_2(x)$ pour tout $x \in]a,b[$, alors $L_1 \leq L_2$.

b) Supposons que de plus $f_1(x) < f_2(x)$. Est-ce que $L_1 < L_2$? Justifier votre réponse.

5. Soit f et h des fonctions vérifiant $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ et $\lim_{x\to a^-} h(x) = L$. Supposons de plus qu'il existe $c < a$ et une fonction g tel que pour tout $x \in]c,a[$ nous avons $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Montrer que

$$\lim_{x\to a^-} g(x) = L.$$

Astuce : ce n'est pas une conséquence directe de l'exercice précédent.